PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF KINCIR ANGIN *DOUBLE QUADRILATERAL*

Fery Firmansah, M. Wahid Syaifuddin

Abstrak : *Graf* $G=(V(G),E(G))$ *dengan* $V(G)$ *adalah himpunan simpul dan* $E(G)$ *adalah himpunan busur disebut sebagai graf* $G(p,q)$ *jika memiliki* $p=|V(G)|$ *simpul dan* $q=|E(G)|$ *busur. Graf G(p,q) disebut graf harmonis ganjil jika terdapat fungsi f :* $V(G) \rightarrow \{0,1,2....,2q-1\}$ *yang bersifat injektif sedemikian sehingga menginduksi suatu fungsi* $f^* : E(G) \rightarrow \{0,3,5....,2q-1\}$ *yang bersifat bijektif, yang didefinisikan oleh* $f^*(uv)=f(u)+f(v)$ *dan fungsi f dikatakan fungsi pelabelan harmonis ganjil dari graf G(p,q) Graf double quadrilateral DQ adalah graf yang dibentuk dari dua graf lingkaran* C_4*dengan himpunan simpul masing-masing adalah* $\{u_0,v_1,v_2,w_1\}$ *dan* $\{u_0,v_2,v_3,w_2\}$ *yang terhubung dengan satu busur persekutuan* u_0v_2. *Graf kincir angin double quadrilateral* $DQ^{(k)}$*dengan* $k \geq 1$ *adalah graf yang dibentuk dari k graf double quadrilateral DQ yang mempunyai satu simpul pusat persekutuan* u_0. *Pada makalah ini akan diberikan kontruksi dan pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin double quadrilateral* $DQ^{(k)}$*dengan* $k \geq 1$ *sedemikian sehingga graf kincir angin double quadrilateral* $DQ^{(k)}$ *dengan adalah graf harmonis ganjil.*

Kata Kunci : *double qudrilateral*, graf kincir angin, graf harmonis ganjil, pelabelan harmonis ganjil

PENDAHULUAN

Teori graf adalah bagian dari matematika kombinatorik yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menyelesaikan suatu persoalan agar lebih mudah untuk diselesaikan. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek diskrit sebagai titik atau simpul (vertex) dan hubungan antara objek diskrit sebagai garis atau busur (edge). Pelabelan graf diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1964, sampai tahun 2015 dan telah ditemukan banyak hasil riset dari pelabelan graf yang dikumpulkan dan diperbaharui secara teratur oleh Gallian (2015) dan diterbitkan oleh Electronic Journal of Combinatorics 18 dengan judul A Dynamic Survey of Graph Labeling.

Gallian (2015) telah merangkum kurang lebih 2000 jurnal dari seluruh peneliti dunia dan kurang lebih sudah ditemukan 200 kelas graf baru beserta pelabelannya. Dalam jurnal tersebut juga diperoleh jenis pelabelan graf yang dapat digunakan untuk melabel suatu graf, antara lain pelabelan jumlah, pelabelan jumlah eksklusif, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan graceful, pelabelan harmonis, pelabelan harmonis genap dan pelabelan harmonis ganjil. Dari sisi aplikasi pelabelan graf dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang keilmuan diantaranya teori koding, radar, astronomi, desain sirkuit, manajemen data base dan kriptografi.

Pelabelan graf pada suatu graf G adalah suatu pemetaan *f* dari setiap elemen graf ke bilangan bulat positif. Bilangan bulat positif tersebut dinamakan label. Elemen-elemen graf yang dipetakan bisa berupa

** Prodi Pendidikan Matematika, FKIP, UNWIDHA Klaten*

himpunan simpul, himpunan busur atau kombinasinya. Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan simpul maka disebut pelabelan simpul dan jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan busur maka disebut pelabelan busur. Sedangkan jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan simpul dan himpunan busur maka disebut pelabelan total.

Pelabelan harmonis ganjil diperkenalkan oleh Liang dan Bai pada tahun 2009. Pada makalah ini pembahasan dibatasi untuk graf sederhana, berhingga dan tidak berarah. Graf G = (V(G),E(G)) dengan V(G) adalah himpunan simpul dan E(G) adalah himpunan busur disebut sebagai graf $G(p,q)$ jika memiliki $p = |V(G)|$ simpul dan $q = |E(G)|$ busur. Graf $G(p,q)$ disebut sebagai graf harmonis ganjil jika terdapat fungsi $f : V(G) \rightarrow \{0,1,2....,2q-1\}$ yang bersifat injektif sedemikian sehingga menginduksi suatu fungsi $f^*: E(G) \rightarrow \{1,3,5....,2q-1\}$ yang bersifat bijektif, yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u)+f(v)$ dan fungsi f disebut sebagai fungsi pelabelan harmonis ganjil dari graf G(p,q) (Liang dan Bai, 2009).

Liang dan Bai (2009) telah menunjukkan sifat-sifat graf yang mempunyai pelabelan harmonis ganjil diantaranya jika G adalah graf harmonis ganjil maka G adalah graf bipartit dan jika graf $G(p,q)$ adalah graf harmonis ganjil maka $2\sqrt{q} \leq p \leq 2q-1$. Dalam makalah yang sama Liang dan Bai (2009) juga telah membuktikan bahwa graf lingkaran C_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n \equiv 0(\text{mod}4)$, graf komplit K_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika n=2, graf komplit k-partit $K(n_1,n_2,...,n_k$ adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika k=2, graf kincir angin K^t_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika n=2.

Berikut diberikan beberapa hasil penelitian yang relevan dengan makalah ini. Vaidya dan Shah (2011) membuktikan bahwa graf shadow dan graf split dari graf lintasan P_n dan graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf harmonis ganjil. Saputri, Sugeng dan Froncek (2013) membuktikan bahwa graf dumbel $D_{n,k,2}$, $n \equiv k \equiv 0$ (mod4) dan $n \equiv k \equiv 2$ (mod4) dan graf $C_n \Theta K_1$, $n \equiv 0$(mod4) adalah graf harmonis ganjil, graf $C_n \times P_m$ adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n \equiv 0$ (mod4). Abdel-Aal (2014) membuktikan bahwa graf yang dibentuk dari dua copy graf lingkaran C_n genap dengan satu busur persekutuan, dua copy graf lingkaran C_n, $n \equiv 0$ (mod4) dengan satu simpul persekutuan adalah graf harmonis ganjil.

Alyani, Firmansah, Giyarti dan Sugeng (2013) membuktikan bahwa graf ular ${}_kC_4$ dengan $K \geq 1$ graf ular kC_8 dengan $k \geq 1$ dan graf gelang $C_4^{+(1,k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. Firmansah dan Sugeng (2015) membuktikan bahwa graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ dan gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. Firmansah (2016) membuktikan bahwa gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4$ dengan $k \geq 1$ dan graf ular berlipat $kC4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

Pada makalah ini penulis akan memberikan kontruksi graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$. Selanjutnya penulis akan menunjukkan bahwa graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan mempelajari makalah dan buku yang berkaitan dengan topik penelitian. Selanjutnya hasil studi literatur tersebut digunakan sebagai landasan teori untuk mendapatkan kontruksi pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$. Berikut diberikan langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan kontruksi pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$. Misalkan G adalah graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$.

1. Mengkaji sifat-sifat khusus dari graf G yang bertujuan untuk mendapatkan kontruksi, definisi dan notasi simpul dari graf G ;
2. Memformulasikan fungsi pelabelan simpul dan pelabelan busur menjadi suatu rumus kontruksi pelabelan harmonis ganjil yang berlaku secara umum untuk graf G ;
3. Mengkontruksi hasil yang diperoleh dalam bentuk teorema disertai dengan buktinya secara matematis.

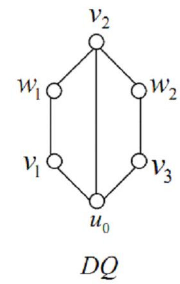
HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi dan Kontruksi dari Graf *Double Qudrilateral DQ*

Berikut diberikan definisi dari graf *double quadrilateral DQ*, selanjutnya diberikan kontruksi dan notasi simpul dari graf *double quadrilateral DQ*.

Definisi 1. Graf double *quadrilateral DQ* adalah graf yang dibentuk dari dua graf lingkaran C_4 dengan himpunan simpul masing-masing adalah $\{u_0, v_1, v_2, w_1\}$ dan $\{u_0, v_2, v_3, w_2\}$ yang terhubung dengan satu busur persekutuan u_0, v_2.

Berikut diberikan kontruksi, notasi simpul dan notasi busur dari graf *double quadrilateral DQ* pada Gambar 1.



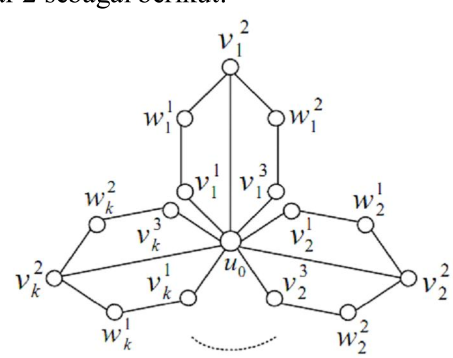
Gambar 1. Kontruksi dan notasi simpul dari graf *double quadrilateral DQ*

Definisi dan Kontruksi dari Graf Kincir Angin *Double Quadrilateral DQ*

Berikut diberikan definisi, kontruksi dan notasi simpul graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$, selanjutnya didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$dengan $k \geq 1$.

Definisi 2. Graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf yang dibentuk dari k graf double quadrilateral DQ yang mempunyai satu simpul pusat persekutuan u_0 .

Kontruksi dan notasi simpul dari graf kincir double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$diberikan pada Gambar 2 sebagai berikut:



Gambar 2. Kontruksi dan notasi simpul dari graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$.

Berdasarkan notasi simpul dan kontruksi pada Gambar 2 didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah

$$V\left(DQ^{(k)}\right) = \{u_0\} \cup \left\{v_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1,2,3\right\} \cup \left\{w_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1,2\right\} \text{ dan}$$

$$E\left(DQ^{(k)}\right) = \left\{u_0 v_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1,2,3\right\} \cup \left\{v_i^{2j-1} w_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1,2\right\} \cup \left\{w_i^j v_i^2 \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1,2\right\}.$$

Pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$

Berikut diberikan sifat yang menyatakan bahwa graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$adalah graf harmonis ganjil, selanjutnya diberikan beberapa contoh untuk memperjelas sifat tersebut.

Teorema 1. Graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil.

Bukti. Misalkan $DQ^{(k)}$ adalah graf kincir angin double quadrilateral dengan $k \geq 1$. Himpunan simpul dan himpunan busur dari $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$adalah

$$V\left(DQ^{(k)}\right) = \{u_0\} \cup \left\{v_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1,2,3\right\} \cup \left\{w_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1,2\right\} \text{ dan}$$

$$E\left(DQ^{(k)}\right) = \left\{u_0 v_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1,2,3\right\} \cup \left\{v_i^{2j-1} w_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1,2\right\} \cup \left\{w_i^j v_i^2 \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1,2\right\}$$

maka $p = \left|V\left(DQ^{(k)}\right)\right| = 5k + 1$ dan $q = \left|E\left(DQ^{(k)}\right)\right| = 7k$.

Definisikan fungsi pelabelan simpul $f : V(DQ^{(k)}) \rightarrow \{0,1,2,3,...,14k-1\}$ sebagai berikut:

$$f(u_0) = 0 \qquad (1.1)$$

$$f\left(v_i^j\right) = 6i + 2j - 7, 1 \leq i \leq k, j = 1,2,3 \qquad (1.2)$$

$$f\left(w_i^j\right) = 14k - 14i + 2j + 4, 1 \leq i \leq k, j = 1,2 \qquad (1.3)$$

Berdasarkan fungsi pelabelan simpul f pada (1.1), (1.2), dan (1.3) diperoleh himpunan simpul setelah dilabel sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f\left(V\left(DQ^k\right)\right) &= \{0\} \cup \{1,7,13,\ldots,6k-5,3,9,15,\ldots,6k-3,5,11,17,\ldots,6k-1\} \\
&\cup \{14k-8,14k-22,14k-36,\ldots,20,6,14k-6,14k-20,14k-34,\ldots,22,8\} \\
&= \{0\} \cup \{1,3,5,7,8,11,13,15,17,\ldots,6k-5,6k-3,6k-1\} \\
&\cup \{6,8,20,22,\ldots 14k-36,14k-34,14k-22,14k-20,14k-8,14k-6\} \\
&= \{0,1,3,5,6,7,8,\ldots,6k-3,6k-1,\ldots,14k-8,14k-6\} \\
&= \{0,1,3,5,\ldots,14k-6\}.
\end{aligned}$$

ISSN 0215-9511

Terlihat bahwa fungsi pelabelan simpul *f* memberikan label yang berbeda pada setiap simpul dan $f\left(V\left(DQ^{(k)}\right)\right)=\{0,1,3,5,...,14k-6\}\subseteq\{0,1,2,3,...,14k-1\}$ sehingga fungsi pelabelan simpul *f* memenuhi pemetaan injektif.

Setelah menunjukan fungsi pelabelan simpul *f* memenuhi pemetaan injektif, selanjutnya akan ditunjukan bahwa fungsi pelabelan busur *f** memenuhi pemetaan bijektif. Didefinisikan fungsi pelabelan busur f* : *E(DQ$^{(k)}$)* → {1,3,5,7,...,14k-1} sebagai berikut:

$$f^*\left(u_0v_i^j\right)=6i+2j-7, 1\le i\le k, j=1,2,3 \quad (1.4)$$

$$f^*\left(v_i^{2j-1}w_i^j\right)=14k-8i+6j-5, 1\le i\le k, j=1,2 \quad (1.5)$$

$$f^*\left(w_i^jv_i^2\right)=14k-8i+2j+1, 1\le i\le k, j=1,2 \quad (1.6)$$

Berdasarkan fungsi pelabelan busur *f** pada (1.4), (1.5), dan (1.6) diperoleh himpunan busur setelah dilabel sebagai berikut:

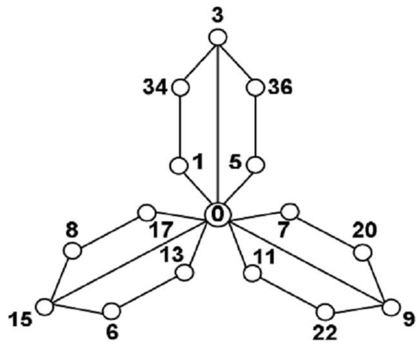
$$f^*\left(E\left(DQ^k\right)\right)=\{1,7,13,...,6k-5,3,9,15,...,6k-3,5,11,17,...,6k-1\}$$
$$\cup\{14k-7,14k-15,...,6k+9,6k+1,14k-1,14k-9,...,6k+15,6k+7\}$$
$$\cup\{14k-5,14k-13,...,6k+11,6k+3,14k-3,14k-11,...,6k+13,6k+5\}$$
$$=\{1,3,5,7,8,11,13,15,17,...,6k-5,6k-3,6k-1\}$$
$$\cup\{6k+1,6k+7,6k+9,6k+15,...,14k-15,14k-9,14k-7,14k-1\}$$
$$\cup\{6k+3,6k+5,6k+11,6k+13,...,14k-13,14k-11,14k-5,14k-3\}$$
$$=\{1,3,5,7,9,...,6k-1,6k+1,6k+3,6k+5,...,14k-5,14k-3,14k-1\}$$
$$=\{1,3,5,7,...,14k-1\}$$

Terlihat bahwa fungsi pelabelan busur *f** memberikan label yang berbeda pada setiap busur dan *f** *E(DQ$^{(k)}$)* → {1,3,5,7,...,14k-1} sehingga fungsi pelabelan busur *f** memenuhi pemetaan bijektif.

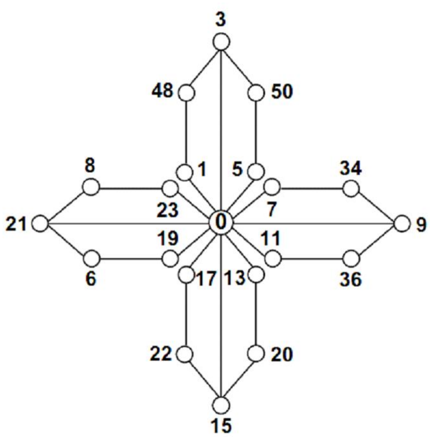
Telah ditunjukkan bahwa fungsi pelabelan simpul *f* memenuhi pemetaan injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi pelabelan busur *f** yang bijektif. Akibatnya graf kincir angin *double quadrilateral* *DQ$^{(k)}$* dengan $k\ge1$adalah graf harmonis ganjil ■

ISSN 0215-9511

Contoh 1. Diberikan contoh pelabelan harmonis ganjil dari graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(3)}$ pada Gambar 3 dan graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(3)}$ pada Gambar 4.



Gambar 3. Pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir *double quadrilateral* $DQ^{(3)}$.



Gambar 4. Pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir *double quadrilateral* $DQ^{(4)}$.

Dari Gambar 3 terlihat bahwa label busur pada graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(3)}$ membentuk himpunan bilangan ganjil $f^*(E(DQ^{(3)}))$ = {1,3,5,7,....39} begitu juga Gambar 4 label busur pada graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(4)}$ membentuk himpunan bilangan ganjil $f^*(E(DQ^{(4)}))$ = {1,3,5,7,....53}

SIMPULAN

Pada makalah ini telah diberikan definisi dan kontruksi dari graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$. Selain hal tersebut juga telah diberikan kontruksi pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ sedemikian sehingga graf kincir angin angin double quadrilateral $DQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. Saat ini penulis sedang memperluas kasus tersebut untuk kelas graf yang lain, yaitu graf kincir angin variasi double quadrilateral $VDQ^{(k)}$ dengan $k \geq 1$, sehingga memungkinkan untuk dilakukan penelitian lebih lanjut.

ISSN 0215-9511

DAFTAR PUSTAKA

Abdel-Aal, M. E. 2014. New Families of Odd Harmonious Graphs. International Journal of Soft Computing, Mathematics and Control, 3(1), 1-13.

Alyani, F., Firmansah, F., Giyarti, W., dan Sugeng, K. A. 2013. The Odd Harmonious Labeling of kCn-Snake Graphs for Spesific Values of n, that is, for n = 4 and n = 8. IndoMS International Conference on Mathemathics and Its Applications, Diselenggarakan oleh Program Studi Matematika, UGM dan IndoMS, 6-7 November 2013 (hal. 225-230). Yogyakarta: Indonesian Mathematical Society.

Baca, M dan Miller, M. 2008. Super Edge-Antimagics Graphs : A Wealth of Problems anda Some Solution. Florida : Brown Walker Press.

Firmansah, F., dan Sugeng, K. A. 2015. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin Belanda dan Gabungan Graf Kincir Angin Belanda. Magistra, No 94 Th. XXVII, ISSN 0215-9511, 56-92

Firmansah, F. 2016. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Gabungan Graf Ular dan Graf Ular Berlipat. Konferensi Nasional Matematika dan Pembelajarannya (KNPMP 1), Diselenggarakan oleh Program Studi Pendidikan Matematika, UMS, 12 Maret 2016 Surakarta: Muhammadiyah University Press.

Gallian, J. A. 2015. A Dynamic Survey of Graph Labeling. The Electronic Journal of Combinatorics, 18. #DS6.

Harary, F. 1996. Graph Theory. Philippines : Addison-Wesley Publishing Company.

Liang, Z., dan Bai, Z. 2009. On The Odd Harmonious Graphs with Applications, J. Appl. Math. Comput., 29, 105-116. doi:10.1007/s12190-008-0101-0

Rismayati. 2013. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Hairy Cycle, Graf Shadow Lingkaran dan Graf Generalisasi Shadow Lingkaran. Tesis. Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia.

Saputri, G. A., Sugeng, K. A., dan Froncek, D. 2013. The Odd Harmonious Labeling of Dumbbell and Generalized Prims Graphs, AKCE Int, J. Graphs Comb., 10(2), 221-228.

Vaidya, S. K., dan Shah, N. H. 2011. Some New Odd Harmonious Graphs. International Journal of Mathematics and Soft Computing, 1(1), 9-16.

West, D. B. 2001. Introduction to Graph Theory (2end ed.). London : Pratice Hall.